



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rychlokurz forenzní DNA statistiky

21.10.2011

Anastassiya Žídková
anastazie.d@gmail.com



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Program dnešního kurzu

- Úvod
- První část
 - Základní zákony pravděpodobnosti
- Druhá část
 - Bayesova věta
 - Zásady při interpretaci výsledků
 - Nejčastější chyby při interpretaci výsledků



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod

- Proč používat statistiku ve forenzní genetice?
 - ✓ Ve forenzní genetice nestačí pouhé konstatování shody či neshody DNA profilů. Potřebujeme zjistit, jak silným důkazem jsou námi zjištěné výsledky. Proto používáme statistiku, abychom zjistili, jaká je pravděpodobnost, že výsledky svědčí pro jednu z hypotéz pouze shodou náhod.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Nebojte se statistiky 😊



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

První část

Základní zákony pravděpodobnosti





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Označení pravděpodobnosti

- $P(A)$ – pravděpodobnost jevu A
- $P(A|E)$ – pravděpodobnost, že tvrzení A je pravdivé, za předpokladu, že známe E
- Obecně je $P(\text{Tvrzení} | \text{Informace})$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad:

Která pravděpodobnost je větší?

P_1 (zvíře je kočka | zvíře má 4 nohy)

P_2 (zvíře je kočka | zvíře má 4 nohy a mňouká)





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

První zákon pravděpodobnosti

$$0 \leq P(A | E) \leq 1$$

- Pravděpodobnost jevu A může nabývat hodnoty mezi nulou a jedničkou.
- Pravděpodobnost se může rovnat nule nebo jedné jenom v teoretické statistice. V ostatních vědách včetně forenzní genetiky a obecně v lidském životě, pravděpodobnost testovaných hypotéz se může pouze blížit k nule nebo jedné, ale nikdy se nemůže rovnat nule nebo jedné.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

První zákon pravděpodobnosti

$$P(A|A) = 1 \text{ pro jakékoliv } A$$

Příklad: jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A, pokud Vám statistik řekne, že nastane jev A



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

1. Pro neslučitelné jevy:

$$P(A \text{ nebo } B \mid E) = P(A \mid E) + P(B \mid E)$$

Neslučitelné jevy jsou ty, které nemohou nastat současně.

$P(A \text{ nebo } B)$ lze zapsat jako $P(A \cup B)$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

Příklad: jaká je pravděpodobnost, že padne 2 (jev A) nebo 4 (jev B) při hodů kostkou?





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

Řešení: kostka má 6 stěn (6 čísel). Při jednom hodů může padnout jenom jedno číslo, proto jevy A a B jsou neslučitelné. Pravděpodobnost padnutí jednotlivého čísla je $1/6$.

$$P(A \cup B | E) = P(A | E) + P(B | E) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

Příklad: Matka má v lokusu TH01 genotyp 6, 7
Dítě má v lokusu TH01 genotyp 6, 7. Jaká je pravděpodobnost, že náhodný muž z populace předal dítěti právě alelu 6 (jev A) nebo alelu 7 (jev B)?

Pomocná data: Lokus TH01, frekvence alely 6 je 0,225, frekvence alely 7 je 0,1545



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

Řešení: Pokud nebereme v úvahu uniparentální disomii, otec musí předat jenom jednu alelu. Proto jevy A a B jsou neslučitelné.

$$P(A \cup B | E) = P(A | E) + P(B | E) = 0,225 + 0,1545 = 0,3795$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

2. Pro slučitelné jevy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Průnik obou jevů, tj. pravděpodobnost, že oba jevy nastanou současně. U neslučitelných jevů se tato pravděpodobnost rovná 0.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

Příklad: jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete z 52 karet královnu (Q) (jev A) a nebo kříže (jev B)?





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Druhý zákon pravděpodobnosti

Řešení: jev A a jev B nejsou neslučitelné, mohou nastat zároveň (křížová královna).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52$$

Pravděpodobnost,
že vytáhnete
královnu

Pravděpodobnost,
že vytáhnete kříže

Pravděpodobnost,
že vytáhnete
křížovou královnu



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

1. Pro závislé jevy

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

Průnik
pravděpodobností
jevu A a B, neboli
pravděpodobnost
výskytu jevu A a
ZÁROVEŇ jevu B

Podmíněná
pravděpodobnost, tj.
pravděpodobnost
výskytu jevu A za
podmínky, že nastal
jev B

Pravděpodobnost
výskytu jevu B



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

2. Pro nezávislé jevy

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Jevy A a B jsou nezávislé, pokud pravděpodobnost jevu A nezávisí na výskytu jevu B a naopak.

Pro nezávislé jevy platí

$$P(A | B) = P(A) \text{ a také } P(B | A) = P(B)$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

Příklad:1) Jaká je pravděpodobnost, že padne dvě šestky (jev A) při hodů dvěma kostkami?

2) Jaká je pravděpodobnost, že padne 2 (jev B) a 4 (jev C) při hodů dvěma kostkami?





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

Řešení:

1) Kostka má 6 stěn (6 čísel). Při hodu jednou kostkou může nastat 1 ze 6 variant. Při hodu dvěma kostkami může nastat jedna z 36 variant. Hody kostkami jsou nezávislé jevy.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

Řešení:

2) Celkově při hodu dvěma kostkami může nastat 36 variant. Jevy B a C mohou nastat současně, pokud na jedné kostce padne 2 a na druhé 4 a nebo obráceně, tedy dvě varianty z 36, proto pravděpodobnost toho, že nastane jev B a zároveň jev C

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \times 1/2 = 1/6 \times 1/6 \times 2 = 1/18$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

Příklad: Máme hypotetické město, kde čtvrtinu obyvatelstva tvoří Indiáni. Jaká je pravděpodobnost, že potkáte na ulici Indiána (jev B), který bude mít v lokusu vWA genotyp 8,11 (jev A).

Pomocná data: frekvence genotypu 8, 11 v lokusu vWA v indiánské populaci je 0,15



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Třetí zákon pravděpodobnosti

Řešení:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A | B) = 0,25 \times 0,15 = 0,0375$$

Frekvence Indiánů
ve městě

Frekvence genotypu
8, 11 v lokusu vWA v
populaci Indiánů



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nezávislé a neslučitelné jevy

Neslučitelné jevy nejsou nezávislé.

Například, zelené (jev A) a červené (jev B) světla semaforu jsou neslučitelné jevy, protože, když svítí zelená nemůže zároveň svítit červená. Ovšem tyto jevy jsou závislé, protože pravděpodobnost, že svítí zelená, je jiná, než pravděpodobnost, že svítí zelená, za předpokladu, že svítí červená.

$$P(A|B) = 0$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jak zjistit, zda jsou jevy nezávislé?

Nezávislé jevy jsou ty, pro které platí, že výskyt jednoho jevu neovlivňuje pravděpodobnost výskytu jiného jevu. Proto, abychom zjistili, zda jevy A a B jsou nezávislé, zkontrolujeme, zda

$$P(A|B) = P(A)$$

a

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nezávislé a neslučitelné jevy

Příklad: Máte sadu 52 karet, nechť jev

A – vytáhnete 2

B – vytáhnete černou kartu

C – vytáhnete figuru

Jsou jevy A a B nezávislé?

Jsou jevy A a C nezávislé?



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nezávislé a neslučitelné jevy

Řešení pro A a B: $P(A \cap B) = 2/52 = 1/26$

$$P(A) \times P(B) = 4/52 \times 26/52 = 1/13 \times 1/2 = 1/26$$

Protože se obě pravděpodobnosti rovnají, jevy jsou nezávislé.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nezávislé a neslučitelné jevy

Řešení pro A a C: $P(A) = 4/52 = 1/13$

$P(A|C) = 0$, protože jevy A a C jsou
neslučitelné

Protože $P(A) \neq P(A|C)$, jevy jsou závislé.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady neslučitelných a nezávislých jevů ve forenzní genetice

- Neslučitelné jevy
 - Různé genotypy ve stejném lokusu u jedné osoby (výjimka – mozaika)
- Nezávislé jevy
 - Genotypy v různých lokusech, pokud nejsou tyto lokusy ve vazbě



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Doplňkové jevy

Doplňkový jev B k jevu A obsahuje soubor všech jevů, které mohou nastat, kromě jevu A.

Potom pravděpodobnost výskytu jevu A je

$$P(A) = 1 - P(B)$$

Označení doplňkového jevu je A^c nebo \bar{A} .



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Doplňkové jevy

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hození kostkou padne 6 (jev A) a jaká je pravděpodobnost doplňkového jevu (jev \bar{A})





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Doplňkové jevy

Řešení: Pravděpodobnost toho, že padne 6, je $1/6$.

Potom

$$\bar{A} = 1 - P(A) = 1 - 1/6 = 5/6$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zákon celkové pravděpodobnosti

$$P(C) = P(C|A) \times P(A) + P(C|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

Pravděpodobnost výskytu
jevu C, pokud nastane jev A

Pravděpodobnost výskytu jevu C, pokud
nastane jakýkoliv jiný jev, než A

$$P(C) = P(C|A) \times P(A) + P(C|B) \times P(B) + P(C|D) \times P(D)$$

Pokud $P(A) + P(B) + P(D) = 1$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zákon celkové pravděpodobnosti

Příklad: Použijte zákon celkové pravděpodobnosti a zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne 2 (jev A), pokud je jev B – padne liché číslo a jev \bar{B} – padne sudé číslo





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zákon celkové pravděpodobnosti

Řešení: Pokud použijeme zákon celkové pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \times P(B) + P(A|\bar{B}) \times P(\bar{B}) = \\ &= 0 \times 1/2 + 1/3 \times 1/2 = 1/6 \end{aligned}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zákon celkové pravděpodobnosti

Příklad: Máme hypotetické město, kde žije 55% Čechů (jev A), 30% Němců (jev B) a 15% Slováků (jev C). Na místě činu byla nalezena krevní stopa, která nepatří oběti. Vzorek krevní stopy má v lokusu FGA genotyp 20, 22. Frekvence tohoto genotypu v české, německé a slovenské populaci jsou 0,22, 0,34 a 0,18. Jaká je pravděpodobnost nalezení člověka s daným genotypem (jev D) v celkovém obyvatelstvu hypotetického města?



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zákon celkové pravděpodobnosti

Řešení: $P(A) + P(B) + Pr(C) = 1$

Použijeme zákon celkové pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times \\ P(C) &= 0,22 \times 0,55 + 0,34 \times 0,3 + 0,18 \times 0,15 = \\ &= 0,121 + 0,102 + 0,027 = 0,25 \end{aligned}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Konec první části

